

**CONCOURS INTERNE ET DE 3^{ème} VOIE
DE TECHNICIEN SUPERIEUR TERRITORIAL**

SESSION 2005

Durée : 3h00
Coefficient : 3

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Cette épreuve porte sur la partie commune des programmes de terminales S et STI en vigueur l'année précédant celle du concours, définis par arrêté du ministre de l'éducation nationale. Est supposé connu le contenu des parties communes des programmes de mathématiques des classes de seconde et de première du second degré conduisant au baccalauréat des séries S et STI

Les candidats peuvent traiter les problèmes dans l'ordre qui leur convient, mais en indiquant le numéro de ceux-ci.

I - Analyse d'une fonction numérique : 14 points

Partie A : étude du signe de $x^3 - 1 + 2 \ln x$

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1 + 2 \ln x$.

1. Calculez $g'(x)$ et étudiez son signe.
2. Dressez le tableau de variation de la fonction g sans déterminer les limites.
3. Calculez $g(1)$.
4. Déduisez des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B : courbe représentative d'une fonction et calcul d'aire

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

Sa courbe représentative, appelée (C), est rapportée au repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a) Déterminez $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote (δ) à (C) dont on précisera une équation.
b) Montrez que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (C).
- c) Calculez $f'(x)$ et montrez que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
- d) En utilisant les résultats de la partie A, déterminez le signe de $f'(x)$, puis dressez le tableau de variation de la fonction f .

- e) Calculez les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote (D) et la courbe (C).
Etudiez alors la position de (C) par rapport à (D).
- f) Tracez sur papier millimétré dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ les droites (D) et (δ), puis la courbe (C).
2. a) Montrez que la fonction H définie sur $]0 ; +\infty [$ par $H(x) = -\frac{1 + \ln x}{x}$ est une primitive de la fonction h définie sur $]0 ; +\infty [$ par $h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.
- b) Calculez la valeur exacte de l'aire Δ en cm^2 du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$. En donner une valeur arrondie au mm^2 près.

II - Géométrie : 6 points

Relativement à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm) on donne les points :

$$O(0 ; 0), A(8 ; 0), B(6 ; 6), H(6 ; 2), P(4 ; 2).$$

- 1) Faites un dessin, sur papier millimétré, que l'on complètera en continuant l'exercice.
- 2) Démontrez que les droites (BH) et (OA) sont perpendiculaires, ainsi que les droites (OH) et (AB). (On pourra utiliser le produit scalaire).
Que peut-on en déduire pour les droites (AH) et (OB) ?
- 3) Déterminez une équation du cercle (C) de centre P passant par O. Démontrez que ce cercle passe aussi par les points A et B. Quel est le point d'intersection des médiatrices des côtés du triangle ABO ?
- 4) La droite (BH) coupe le cercle (C) en B et en un deuxième point B'. Déterminez les coordonnées de B'.
- 5) Démontrez que les points B' et H sont symétriques par rapport à la droite (OA).

Ce sujet comporte 2 pages

- ↪ Vous ne devez faire apparaître aucun signe distinctif dans votre copie, ni votre nom ou un nom fictif, ni signature ou paraphe.
- ↪ Les dessins doivent être effectués sur les feuilles de papier millimétré et agrafés à l'intérieur de la copie, sans aucun signe distinctif (n'y reportez surtout pas votre nom).
- ↪ Seul l'usage d'un stylo noir ou bleu est autorisé (bille, plume ou feutre). L'utilisation d'une autre couleur, pour écrire ou souligner, sera considérée comme un signe distinctif, de même que l'utilisation d'un surligneur.

Le non-respect des règles ci-dessus peut entraîner l'annulation de la copie par le jury.

Les feuilles de brouillon ne seront en aucun cas prises en compte.

L'utilisation d'une calculatrice de fonctionnement autonome et sans imprimante est autorisée.